

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动你的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

多变量微积分笔记15——梯度场和势函数

梯度场的判别

如果一个向量场 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ 是一个梯度场，它的势函数是 $f(x,y)$ ，则：

$$\begin{aligned}\vec{F} &= M\mathbf{i} + N\mathbf{j} = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle \\ \Rightarrow M &= f_x, \quad N = f_y \\ f_{xy} &= f_{yx} \Rightarrow M_y = N_x\end{aligned}$$

所以说，对于一个在平面内处处有定义且处处可导的向量场 $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ ，如果存在 $M_y = N_x$ ，那么这个向量场是梯度场。

示例1

对于 $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ ，用上面的判别法验证：

$$\begin{aligned}M_y &= \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \\ M_y &\neq N_x\end{aligned}$$

所以 $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ 不是梯度场。

示例2

$\mathbf{F} = (4x^2 + axy)\mathbf{i} + (3y^2 + 4x^2)\mathbf{j}$ ， a 是一个常数，当 a 的值是多少时， $\mathbf{F}$ 是梯度场？

$$\begin{aligned}M_y &= \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial(4x^2 + axy)}{\partial y} = ax \\ N_x &= \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(3y^2 + 4x^2)}{\partial x} = 8x \\ M_y &= N_x \Rightarrow a = 8\end{aligned}$$

找出势函数

在上面的示例中， $\mathbf{F} = (4x^2 + 8xy)\mathbf{i} + (3y^2 + 4x^2)\mathbf{j}$ 是梯度场，那么如何找出它的势函数？在简单的梯度场中可以使用猜测法，但这并不总是管用，必须寻找到系统性的解决方案。

线积分法

在梯度场中线积分的轨迹 C 从原点开始，终点是 (x_1, y_1) ：

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

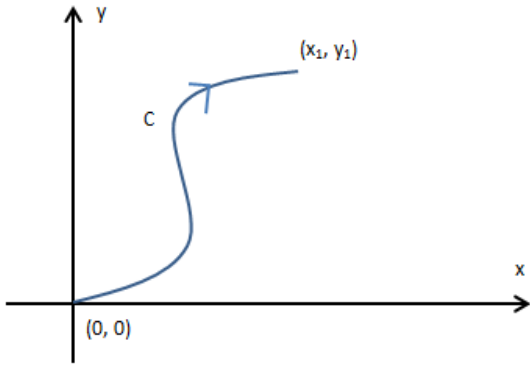
- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

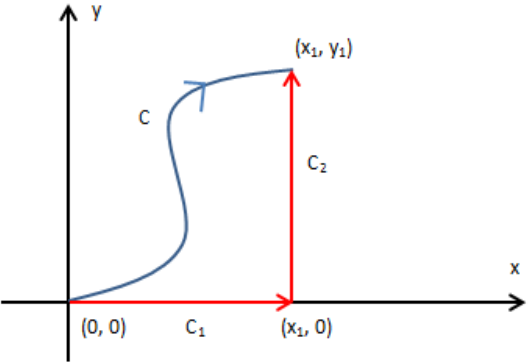
- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人



根据独立路径的原理，梯度场中的线积分只和起点终点有关，和路径无关，所以可以寻求更简单的计算方法：



on C_1 , $y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq x_1$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \langle 4x^2 + 8xy, 3y^2 + 4x^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle = \int_0^{x_1} 4x^2 dx = \frac{4}{3} x_1^3$$

on C_2 , $x = x_1, dx = 0, 0 \leq y \leq y_1$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle 4x^2 + 8xy, 3y^2 + 4x^2 \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_0^{y_1} (3y^2 + 4x_1^2) dy = y_1^3 \\ &= y_1^3 + 4x_1^2 y_1 \end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{4}{3} x_1^3 + y_1^3 + 4x_1^2 y_1$$

根据线积分基本定理：

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(end) - f(start) = f(x_1, y_1) - f(0,0)$$

f(0,0)是一个常数，所以：

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_1, y_1) - f(0,0) = f(x_1, y_1) - C$$

现在：

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_1, y_1) - C = \frac{4}{3} x_1^3 + y_1^3 + 4x_1^2 y_1$$

将x和y的下标去掉，就得到势函数：

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)

有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

$$f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + y^3 + 4x^2y + C$$

这里C是一个常数，说明f是一个势函数族，就像不定积分要加上常数C一样。

验证：

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle 4x^2 + 8yx, 3y^2 + 4x^2 \rangle = \vec{F}$$

不定积分法

梯度场中的势函数 f 满足：

$$\begin{cases} f_x = 4x^2 + 8xy \\ f_y = 3y^2 + 4x^2 \end{cases}$$

根据微积分基本定理，导数的积分等于原函数，这里将y看作常数，对 f_x 求x的积分：

$$f = \int (4x^2 + 8xy) dx = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2y + g(y)$$

由于 f_x 是偏导，所以积分最后并不是加上常数C，而是一个关于y的函数g(y)。

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4}{3}x^3 + 4x^2y + g(y) \right) = 4x^2 + g'(y) = 3y^2 + 4x^2$$

$$\Rightarrow g'(y) = 3y^2$$

$$\Rightarrow g(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C$$

$$\Rightarrow f(x, y) = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2y + g(y) = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2y + y^3 + C$$

需要注意的是，g(y)中一定不会含有x，只有这样，在求 f_x 时g(y)才能等于0。

综合示例

示例1

判断平面向量场是否是保守场：

$$\vec{F} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$$

保守场的前提是，场处处有定义且处处可导，这里的场在 $x = y = 0$ 处没有定义，所以可以直接判定不是保守场。

也可以费点力气验证，C是单位圆：

$$y = \sin\theta, \quad x = \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\vec{F} = \frac{-\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j}}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} = \langle -\sin\theta, \cos\theta \rangle = \langle -y, x \rangle$$

$$M_y = \frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1, \quad N_x = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1, \quad M_y \neq N_x$$

所以F不是保守场，如果绕单位圆一周：

$$dy = \cos\theta d\theta, \quad dx = -\sin\theta d\theta$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \langle -\sin\theta, \cos\theta \rangle \cdot \langle -\sin\theta d\theta, \cos\theta d\theta \rangle = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \neq 0$$

示例2

向量场中b是一个常数，

$$\vec{F} = e^{x+y}[(x+b)\hat{i} + x\hat{j}]$$

当b = ? 时该向量场是一个梯度场？ 梯度场的势函数是什么？

$$\vec{F} = \langle e^{x+y}(x+b), e^{x+y}x \rangle = \langle e^x e^y (x+b), e^x e^y x \rangle$$

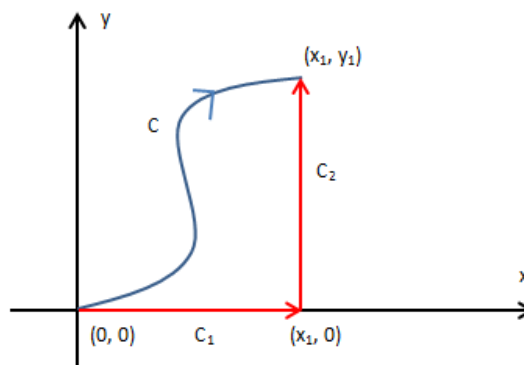
$$M_y = \frac{\partial e^{x+y}(x+b)}{\partial y} = e^{x+y}x + b e^{x+y}$$

$$N_x = \frac{\partial(e^{x+y}x)}{\partial x} = e^{x+y}x + e^{x+y}$$

$$M_y = N_x \Rightarrow b = 1$$

$$\vec{F} = e^{x+y}[(x+1)\hat{i} + x\hat{j}] = \langle e^{x+y}(x+1), e^{x+y}x \rangle$$

线积分法求解势函数：



$$\text{on } C_1 \quad y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq x_1$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_1} \langle e^{x+y}(x+1), e^{x+y}x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_0^{x_1} e^x(x+1)dx \\ &= xe^x \Big|_0^{x_1} \\ &= x_1 e^{x_1} \end{aligned}$$

$$\text{on } C_2 \quad x = x_1, dx = 0, 0 \leq y \leq y_1$$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{C_2} \langle e^{x+y}(x+1), e^{x+y}x \rangle \cdot \langle dx, dy \rangle \\ &= \int_0^{y_1} e^{x_1+y} x_1 dy \\ &= x_1 e^{x_1+y} \Big|_0^{y_1} \\ &= x_1 e^{x_1+y_1} - x_1 e^{x_1} \end{aligned}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = x_1 e^{x_1+y_1}$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(x_1, y_1) - \underbrace{f(0,0)}_{\text{constant}} = f(x_1, y_1) - C$$

$$f(x_1, y_1) = x_1 e^{x_1+y_1} + C \Rightarrow f(x, y) = x e^{x+y} + C$$

不定积分法求解势函数：

$$\vec{F} = \nabla f = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^{x+y}(x+1), e^{x+y}x \rangle$$

选用 f_y 求 y 的积分,因为看起来更简单一点：

$$f(x, y) = \int f_y dy = \int e^{x+y} x dy = x e^{x+y} + g(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y} + x e^{x+y} + g'(x) = f_x = e^{x+y}(x+1)$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = C$$

$$f(x, y) = x e^{x+y} + g(x) = x e^{x+y} + C$$

可以看到，不定积分法要比线积分法更有效率。

作者：我是8位的

出处：<http://www.cnblogs.com/bigmonkey>

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注公众号“我是8位的”



随笔

分类: [多变量微积分](#)

标签: [梯度场](#), [势函数](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的
关注 - 5
粉丝 - 288

[+加关注](#)

0
[推荐](#)

0
[反对](#)

« [上一篇： 概率笔记2——古典概型](#)
» [下一篇： 多变量微积分笔记16——格林公式](#)

posted on 2018-04-24 18:17 [我是8位的](#) 阅读(4667) 评论(0) [编辑](#) [收藏](#) [举报](#)

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

[登录后才能查看或发表评论，立即 \[登录\]\(#\) 或者 \[逛逛\]\(#\) 博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开 >

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日-3月18日

最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
- 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
- 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型

- [Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间](#)
- [溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜](#)
- » [更多新闻...](#)

Powered by:
[博客园](#)

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes